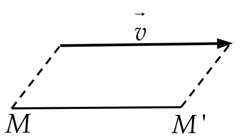
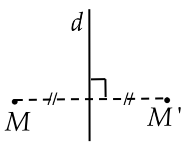
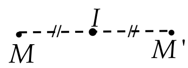
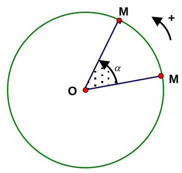
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

<u>Chuyên đề</u> 1

PHÉP BIẾN HÌNH

PHÉP DỜI HÌNH				
1.Tên gọi	Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$	Phép đối xứng trục d	Phép đối xứng tâm I	Phép quay tâm O, góc quay α
2. Kí hiệu	$T_{\vec{v}}$	$Đ_d$	$Đ_I$	$Q_{(O,\alpha)}$
3. Định nghĩa	$M \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M'$ $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$	$M \xrightarrow{Đ_d} M'$ d là trung trực đoạn MM'	$M \xrightarrow{Đ_I} M'$ I là trung điểm đoạn MM'	$M \xrightarrow{Q_{(O,\alpha)}} M'$ $\begin{cases} OM' = OM \\ (OM;OM') = \alpha \end{cases}$
4. Hình minh họa				
5. Biểu thức tìm tọa độ ảnh $M'(x';y')$	$M(x;y) \xrightarrow{T_{\vec{v}=(a;b)}} M'(x';y')$ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$M(x;y) \xrightarrow{Đ_{Ox}} M'(x';y')$ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ $M(x;y) \xrightarrow{Đ_{Oy}} M'(x';y')$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$M(x;y) \xrightarrow{Đ_{O(0;0)}} M'(x';y')$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$Q_{(O,k2\pi)}$ là phép đồng nhất $Q_{(O,\pi+k2\pi)}$ là phép đối xứng tâm O

VÍ DỤ

Tìm ảnh của điểm $M(2;-3)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}(3;-4)$ và phép quay $Q(O,90^0)$

Lời giải

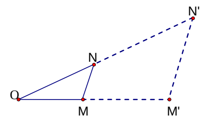
....

....

....

....

....

PHÉP ĐỒNG DẠNG				
1. Tên gọi	**2. Kí hiệu**	**3. Định nghĩa**	**4. Hình minh họa**	**5. Biểu thức tìm tọa độ ảnh** $M'(x';y')$
Phép vị tự tâm O, tỉ số k $(k \neq 0)$	$V_{(O,k)}$	$\boxed{M \xrightarrow{V_{(O,k)}} M'}$ $\boxed{\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}}$		Tâm $O(x_o;y_o)$ $\boxed{M(x;y) \xrightarrow{V_{(O,k)}} M'(x';y')}$ $\boxed{\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_o \\ y' = ky + (1-k)y_o \end{cases}}$

TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHÉP BIẾN HÌNH

	Bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm $A \to A'$ và $B \to B'$ $\boxed{AB = A'B'}$	Biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng	Biến đường thẳng d thành đường thẳng d'	Biến $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$	Biến đường tròn (C) tâm I, bán kính R thành đường tròn (C') tâm I', bán kính R'
$T_{\vec{v}}$	Có	Có	$d'//d$ hoặc $d' \equiv d$	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$	$R' = R$
$Đ_d$	Có	Có	Biến d thành d'	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$	$R' = R$
$Đ_I$	Có	Có	$d'//d$ hoặc $d' \equiv d$	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$	$R' = R$
$Q_{(O,\alpha)}$	Có	Có	Biến d thành d'	$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$	$R' = R$
$V_{(O,k)}$	Có (khi $k = \pm 1$)	Có	$d'//d$ hoặc $d' \equiv d$	$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ với tỉ số $\lvert k \rvert$	$R' = \lvert k \rvert R$

VÍ DỤ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm $I(1;-3)$, bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I;2)$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng trục Ox

Lời giải

....

....

....

....

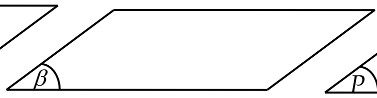
<u>Chuyên đề</u> 2

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Kí hiệu mặt phẳng

$\text{mp}(\alpha)$



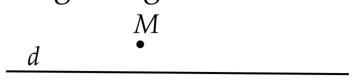
$\text{mp}(\beta)$

$\text{mp}(P)$

$\text{mp}(Q)$

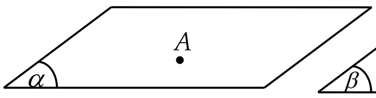
2. Điểm thuộc đường thẳng và điểm không thuộc đường thẳng

$A \in d$

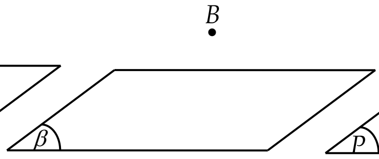


$M \notin d$

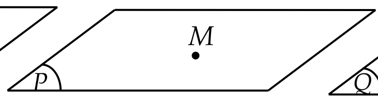
3. Điểm thuộc mặt phẳng và điểm không thuộc mặt phẳng



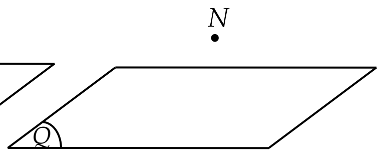
$A \in (\alpha)$



$B \notin (\beta)$

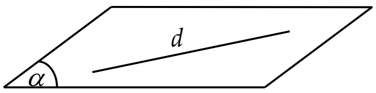


$M \in (P)$

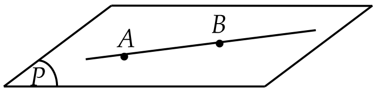


$N \notin (Q)$

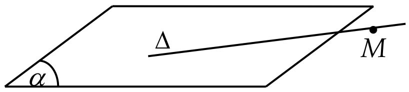
4. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng



$d \subset (\alpha)$

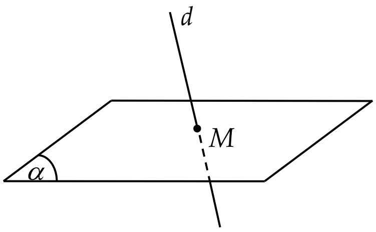


$$\begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Rightarrow AB \subset (P)$$

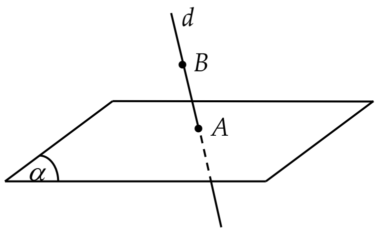


$$\begin{cases} \Delta \subset (\alpha) \\ M \in \Delta \end{cases} \Rightarrow M \in (\alpha)$$

5. Đường thẳng cắt mặt phẳng



$d \cap (\alpha) = M$



$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ B \notin (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AB \cap (\alpha) = A$$

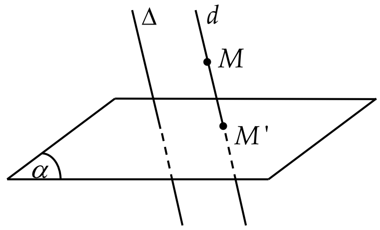
<u>△Ghi chú</u>

....

....

PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song với Δ cắt (α) tại điểm M'.



Tên gọi:

- Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.
- Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu, phương của Δ gọi là phương chiếu.
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó trên (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Ghi chú

....
....
....
....
....

VÍ DỤ

Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BIỂU DIỄN MỘT HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

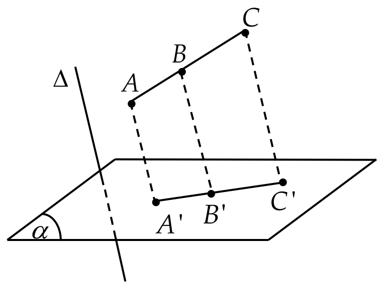
Trong hình học không gian, ngoài hai đối tượng là “điểm” và “đường thẳng”, còn xuất hiện thêm một đối tượng thứ ba là “mặt phẳng”.

Hình biểu diễn của một hình (H) trong không gian là hình chiếu song song của hình (H) lên một mặt phẳng nào đó theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Do đó:

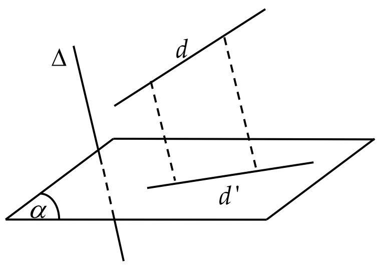
QUA PHÉP CHIẾU SONG SONG, CÁC TÍNH CHẤT SAU **ĐƯỢC BẢO TOÀN** TRONG KHÔNG GIAN

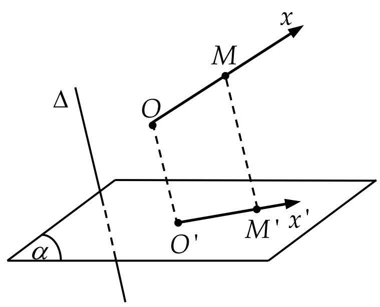
1. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

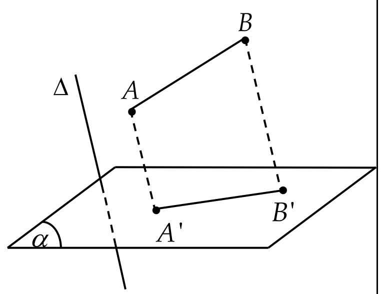


Vẽ A, B, C thẳng hàng và B ở giữa A và C thì trong không gian được vẽ đúng như vậy.

2. Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

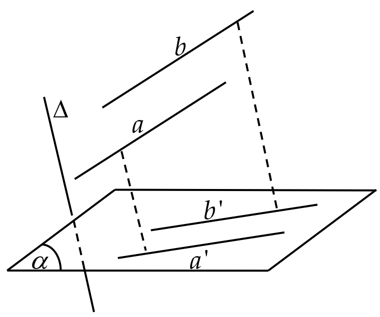






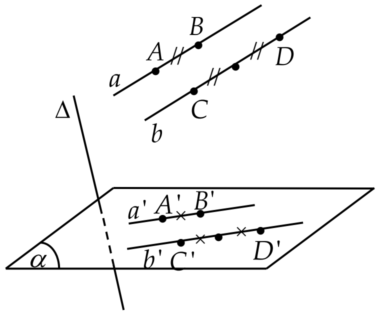
Vẽ đường thẳng, vẽ tia hoặc vẽ đoạn thẳng thì trong không gian được vẽ đúng như vậy.

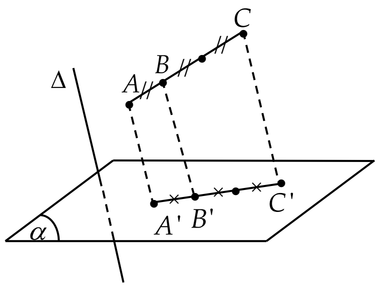
3. Biến hai đường thẳng song song thành đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

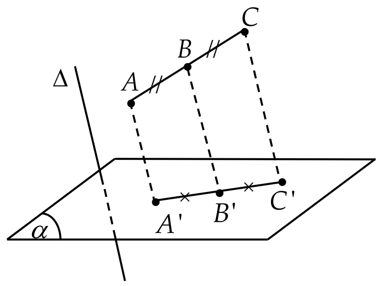


Vẽ hai đường thẳng song song thì trong không gian được vẽ đúng như vậy.

4. Không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



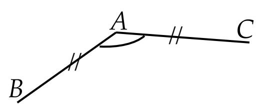
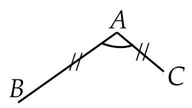




Vẽ trung điểm của một đoạn thẳng, vẽ một điểm chia một đoạn thẳng theo tỉ số *k*, vẽ hai đoạn thẳng song song và đoạn này gấp *k* lần đoạn kia thì trong không gian được vẽ đúng như vậy.

QUA PHÉP CHIẾU SONG SONG, CÁC TÍNH CHẤT SAU **KHÔNG ĐƯỢC BẢO TOÀN** TRONG KHÔNG GIAN

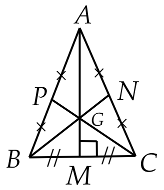
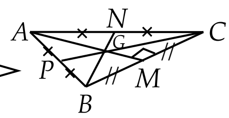
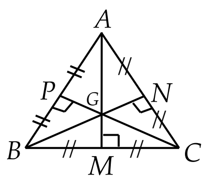
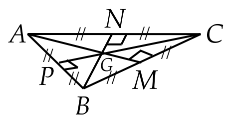
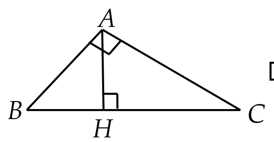
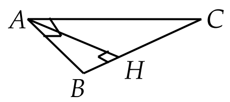
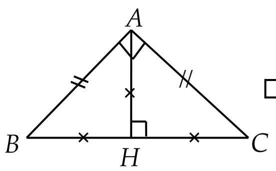
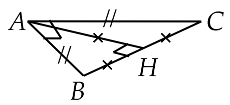
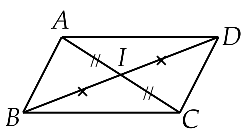
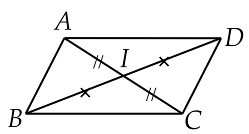
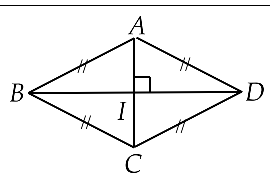
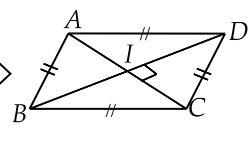
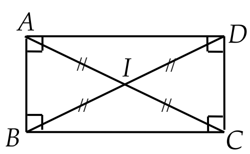
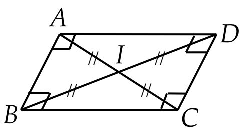
1. Hai đoạn thẳng không song song và bằng nhau thì trong không gian không cần vẽ đúng sự bằng nhau của hai đoạn thẳng đó.
2. Hai đoạn thẳng không song song và đoạn này gấp k lần đoạn kia thì trong không gian không cần vẽ đúng đoạn này gấp k lần đoạn kia.
3. Hai góc bằng nhau (không là hai góc có cạnh tương ứng song song) thì trong không gian không cần vẽ đúng sự bằng nhau của hai góc đó.
4. Góc vuông thì trong không gian có thể vẽ thành góc tù hoặc góc nhọn.
5. Góc nhọn thì trong không gian có thể vẽ thành góc tù hoặc ngược lại.

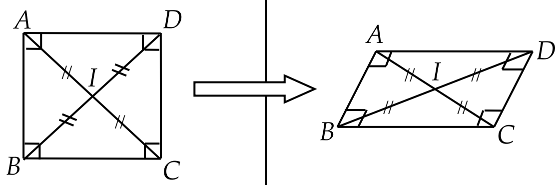
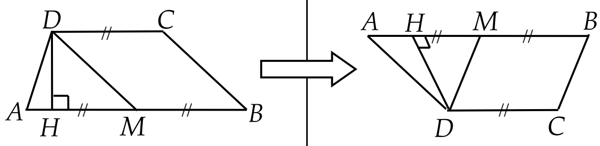
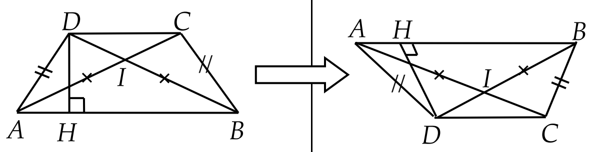
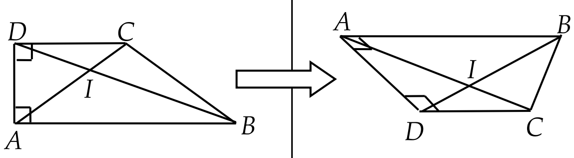
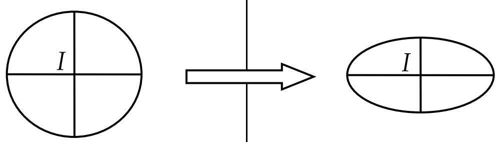
Hình học phẳng	**Hình học không gian**
 $AB = AC$	 $AB = AC$

Ghi chú

....
....
....
....
....

VÀI HÌNH THƯỜNG GẶP

Hình biểu diễn	Hình học phẳng	Hình học không gian	Tính chất sử dụng
Tam giác ABC cân tại A			⚓ $AB = AC$ và AB không song song AC nên không cần vẽ sự bằng nhau của AB và AC. ⚓ $AM \perp BC$ thì trong không gian không cần vẽ đúng sự vuông góc này. ⚓ M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC, AB thì vẽ đúng là trung điểm. ⚓ Trọng tâm G chia các đường trung tuyến theo tỉ lệ $AG = \frac{2}{3}AM$, $BG = \frac{2}{3}BN$, $CG = \frac{2}{3}CP$ thì tỉ lệ đó được bảo toàn trong không gian.
Tam giác đều ABC			Giống tam giác cân
Tam giác ABC vuông tại A			⚓ $AB \perp AC$ thì trong không gian không cần vẽ đúng sự vuông góc này. ⚓ Chân đường cao H nằm gần điểm B hơn điểm C thì trong không gian vẽ đúng tỉ lệ như vậy.
Tam giác ABC vuông cân tại A			⚓ $AB \perp AC$ thì trong không gian không cần vẽ đúng sự vuông góc này. ⚓ H là trung điểm BC thì trong không gian vẽ đúng là trung điểm.
Hình bình hành $ABCD$			⚓ $AB = DC$ và $AB // DC$ nên trong không gian vẽ đúng như vậy. ⚓ $AD = BC$ và $AD // BC$ nên trong không gian vẽ đúng như vậy.
Hình thoi $ABCD$			⚓ Giống hình bình hành ⚓ $AC \perp BD$ thì trong không gian không cần vẽ đúng sự vuông góc này.
Hình chữ nhật $ABCD$			⚓ Giống hình bình hành ⚓ $AC = BD$ và AC không song song BD nên không cần vẽ sự bằng nhau của AC và BD. ⚓ Các góc A, B, C, D vuông thì không cần vẽ đúng vuông góc.

Hình vuông *ABCD*			Giống hình chữ nhật
Hình thang *ABCD* **có hai đáy** *AB* **và** *CD* **đồng thời** *AB* **= 2***DC*			Đáy lớn AB nên đặt ở trên. $AB = 2DC$ và $AB//DC$ nên trong không gian vẽ đúng như vậy. Chân đường cao H nằm gần điểm A hơn điểm M thì trong không gian vẽ đúng tỉ lệ như vậy. M là trung điểm AB thì trong không gian vẽ đúng là trung điểm.
Hình thang cân *ABCD* **có hai đáy** *AB* **và** *CD*			$AB//DC$ nên trong không gian vẽ đúng như vậy. $AD = BC$ và AD không song song BC nên không cần vẽ sự bằng nhau của AD và BC. $AC = BD$ và AC không song song BD nên không cần vẽ sự bằng nhau của AC và BD.
Hình thang *ABCD* **vuông tại** *A* **và** *D* **đồng thời** *AB* **= 2***DC*			Các góc A, D vuông thì không cần vẽ đúng sự vuông góc này. $AB = 2DC$ và $AB//DC$ nên trong không gian vẽ đúng như vậy.
Đường tròn			

TÓM TẮT

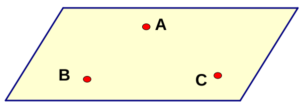
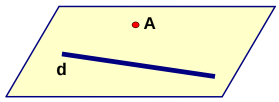
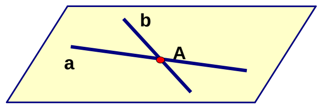
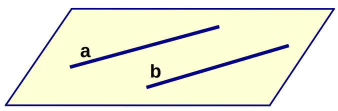
Hình học phẳng	Hình học không gian
Tam giác thường, tam giác cân, tam giác đều, tam giác vuông, tam giác vuông cân.	Vẽ thành tam giác thường
Hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông.	Vẽ thành hình bình hành
Hình thang thường, hình thang cân, hình thang vuông.	Vẽ thành hình thang thường và tỉ số độ dài của hai cạnh đáy được bảo toàn
Đường tròn.	Vẽ thành elip
Trung điểm của một đoạn thẳng.	Vẽ đúng là trung điểm.
Một điểm chia một đoạn thẳng theo tỉ số k.	Vẽ đúng tỉ số k
Hai đoạn song song và bằng nhau.	Vẽ đúng song song và bằng nhau
Hai đoạn song song và đoạn này bằng k lần đoạn kia.	Vẽ đúng song song và đoạn này bằng k lần đoạn kia

- Đường thẳng thì vẽ đường thẳng; đoạn thẳng thì vẽ đoạn thẳng.
- Hai đường thẳng song song thì vẽ song song; hai đường thẳng cắt nhau thì vẽ cắt nhau.
- Hình vẽ phải giữ nguyên quan hệ "thuộc" giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét vẽ liền để vẽ đường nhìn thấy và nét đứt đoạn vẽ cho đường bị khuất.

△Ghi chú

....
....
....
....
....

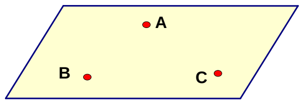
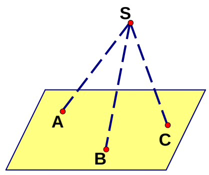
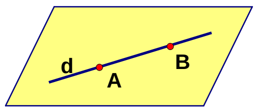
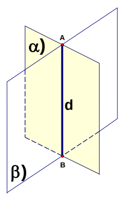
CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Điều kiện	Minh họa	Kí hiệu
1. Ba điểm không thẳng hàng xác định một mặt phẳng.		$mp(ABC)$
2. Một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng xác định một mặt phẳng.		$mp(d,A)$
3. Hai đường thẳng cắt nhau xác định một mặt phẳng.		$mp(a,b)$
4. Hai đường thẳng song song xác định một mặt phẳng		$mp(a,b)$

△Ghi chú

....
....
....
....
....
....

CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN TRONG KHÔNG GIAN

Tính chất	Minh họa
⚓ **<u>TC1</u>**: Có một và chỉ một đường thẳng qua 2 điểm phân biệt.	
⚓ **<u>TC2</u>**: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng.	
⚓ **<u>TC3</u>**: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.	
⚓ **<u>TC4</u>**: Nếu đường thẳng d có 2 điểm phân biệt cùng thuộc mặt phẳng (α) thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α). Nghĩa là: Mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α).	 $\boxed{\left.\begin{array}{l} M\in d\\ d\subset(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow M\in(\alpha)}$
⚓ **<u>TC5</u>**: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung A thì chúng có một điểm chung B khác nữa. ▸ Suy ra: Nếu cắt nhau thì hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) sẽ cắt nhau theo một đường thẳng d gọi là giao tuyến. Giao tuyến d sẽ chứa tất cả điểm chung của 2 mặt phẳng.	 $\boxed{(\alpha)\cap(\beta)=d}$
⚓ **<u>TC6</u>**: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả trong hình học phẳng đều đúng.	

<u>△Ghi chú</u>

....

....

....

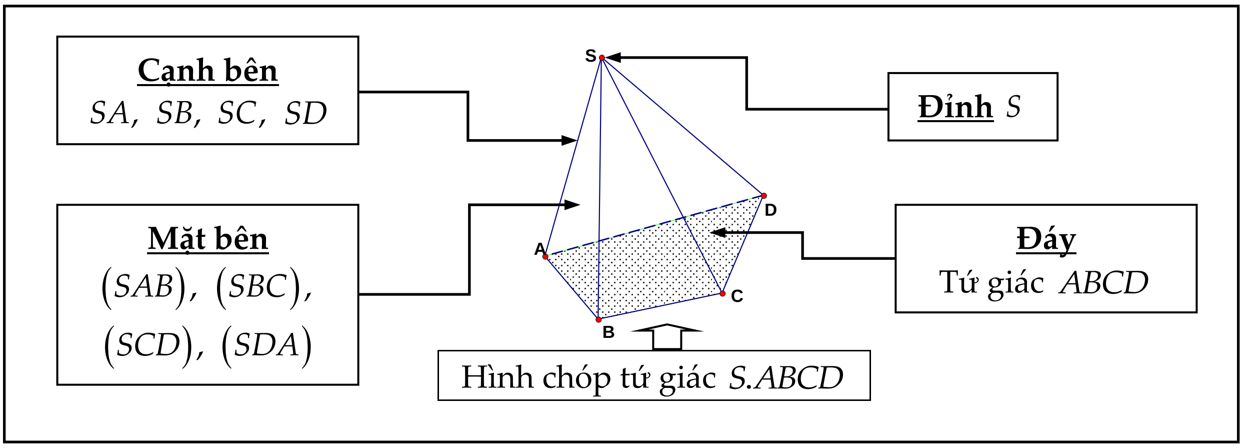
....

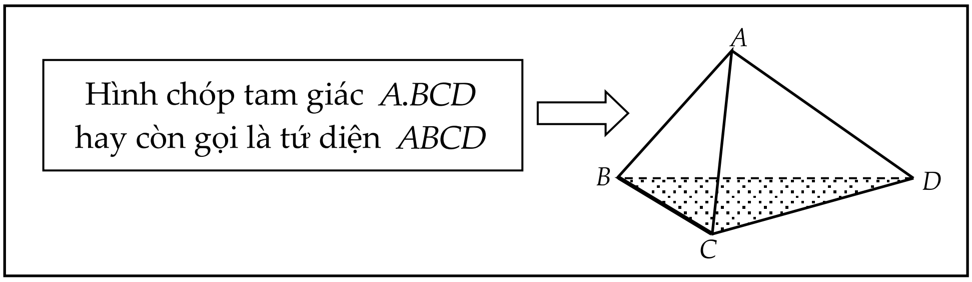
HÌNH CHÓP

⚓ Hình chóp là hình không gian có một mặt phẳng đáy là một đa giác và một điểm không thuộc đáy gọi là đỉnh.

⚓ Nếu hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác,… thì ta gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác…

⚓ Tên gọi và kí hiệu:





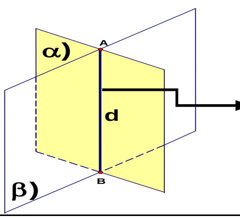
△Ghi chú

VẤN ĐỀ 1

XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) nếu có điểm chung sẽ cắt nhau theo một đường thẳng d gọi là giao tuyến. Giao **tuyến** d sẽ chứa tất cả điểm chung của hai mặt phẳng.
- Kí hiệu giao tuyến $\boxed{d=(\alpha)\cap(\beta)}$



$\boxed{AB=d=(\alpha)\cap(\beta)}$

Phương pháp

- Tìm hai điểm chung của (α) và (β).
- Nối hai điểm **chung** đó lại ta được giao tuyến cần tìm.

Cách tìm điểm chung của hai mặt phẳng

- Nếu điểm chung **có** sẵn thì ta chỉ cần chỉ ra
- Nếu điểm chung chưa có sẵn, ta tìm đường thẳng $a \subset (\alpha)$ và đường thẳng $b \subset (\beta)$ sao cho a cắt b tại một điểm (Muốn vậy a và b phải đảm bảo cùng nằm trong một mặt phẳng thứ ba nào đó) thì **điểm** đó là điểm chung của hai mặt phẳng.

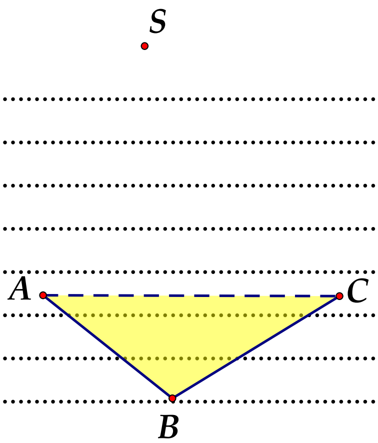
△Ghi chú

....
....
....
....
....
....
....

B. LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm S không nằm trong $mp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SMC).

Lời giải



....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b). Lấy điểm M trên AB và N trên AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn.

a).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(SAD\right)$.

b).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên AB và N trên SC.

a).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(ABN\right)$ và $\left(SMC\right)$.

b).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(DMN\right)$ và $\left(SBC\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác không có các cạnh đối nào song song. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

c).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M,\ N,\ I$ là 3 điểm lần lượt nằm trên các cạnh $AB,\ AC$ và AD. Gọi E là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD.

a).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

b).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNE) và (ABE).

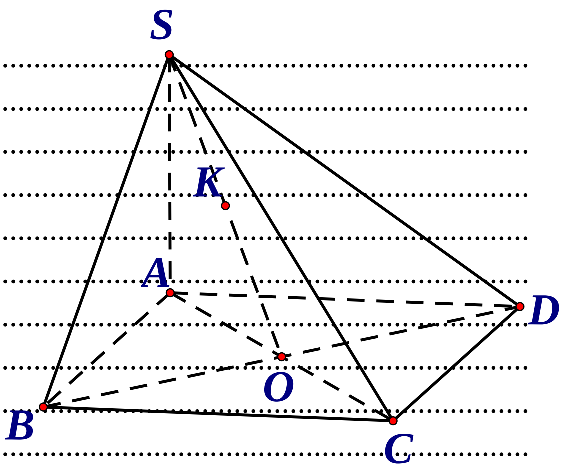
Lời giải

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SO.

a).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AKD) và (SBC).

b).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (BAK) và (SCD).

Lời giải



VẤN ĐỀ 2

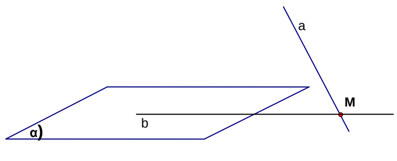
XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Đường thẳng a cắt $mp(\alpha)$ tại một điểm M. Điểm M đó gọi là giao điểm của đường thẳng a và $mp(\alpha)$. Kí hiệu: $\boxed{M = a \cap (\alpha)}$

Phương pháp

- Ta đi tìm một đường thẳng b nào đó nằm trong mặt phẳng (α) mà b cắt đường thẳng a tại một điểm $M \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$



- Trong trường hợp đường thẳng b chưa có sẵn, ta có thể dựa vào phương pháp sau để tìm giao điểm.

- **B1**: Dựa vào hình vẽ xác định một mặt phẳng chứa đường thẳng a.
  Giả sử: Xác định được mặt phẳng (β) chứa a.
- **B2**: Xác định giao tuyến của $mp(\alpha)$ và $mp(\beta)$.
  Giả sử: $(\alpha) \cap (\beta) = b$
- **B3**: Xác định giao điểm của đường thẳng a và giao tuyến b.
  Do a và b cùng nằm trên (β) nên $a \cap b = M$.
- **B4**: Kết luận: $\begin{cases} M \in a \\ M \in b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$.

Ghi chú

....
....
....
....
....
....
....

B. LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BC. Lấy điểm P thuộc đoạn BD sao cho $BP > PD$.

a/.Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b/.Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

Lời giải

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$ và O là giao điểm hai đường chéo. Lấy điểm M thuộc SD.

a/. Tìm giao điểm của đường thẳng SO và mặt phẳng (MBC).

b/. Tìm giao điểm của đường thẳng SA và mặt phẳng (MBC).

Lời giải

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm AB và CD. Lấy điểm P thuộc AD $(PA \neq PD)$.

a/. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD).

b/. Tìm giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (PMN).

Lời giải

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác không có các cạnh đối nào song song. Gọi M là trung điểm SC.

a/. Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b/. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh ba đường thẳng $SO,\ AM$ và BN đồng quy.

Lời giải

<u>Bài 5.</u> Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a/. Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mặt phẳng (SBM).

b/. Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

c/.Tìm giao điểm P của đường thẳng SC và mặt phẳng (ABM).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

<u>Bài 6.</u> Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi N là điểm trên đoạn SC sao cho $CN = 2SN$.

a). Tìm giao điểm I của đường thẳng AN và mặt phẳng (SBD).

b). Chứng minh I là trung điểm SO.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Lấy điểm M trên SA, N trên SB và P trên SC sao cho MN cắt AB tại E, NP cắt BC tại F và MP cắt AC tại G. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của đáy.

a). Tìm giao điểm của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP).

b). Chứng minh ba điểm E, F, G thẳng hàng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm AB và CD; J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

a). Tìm giao điểm F của đường thẳng IJ và mặt phẳng (BCD).

b). Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (IJK) và (ABC).

c). Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ và d đồng qui.

d). Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Lời giải

<u>Bài 9.</u> Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $E,\ F,\ G$ lần lượt là các điểm trên $AB,\ AC,\ BD$ sao cho EF không song song BC và EG không song song AD.

a).Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD).

b). Tìm R và S lần lượt là giao điểm của AD và CD với mặt phẳng (EFG).

c). Chứng minh ba điểm $F,\ S,\ R$ thẳng hàng.

Lời giải

Chuyên đề 3

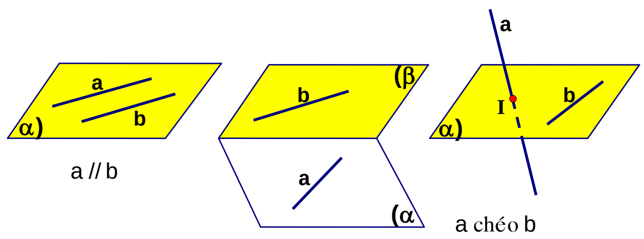
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

VẤN ĐỀ 1

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG
HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

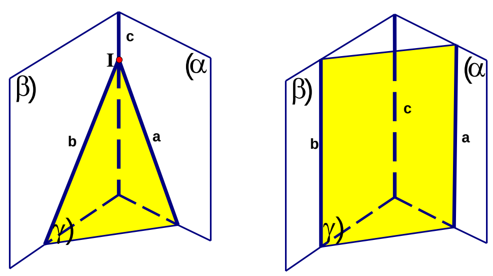
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
- Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng nằm trong bất kỳ mặt phẳng nào. (Như vậy hai đường thẳng chéo nhau cũng không có điểm chung)



- **Định lí 1**: (Về giao tuyến của 3 mặt phẳng)

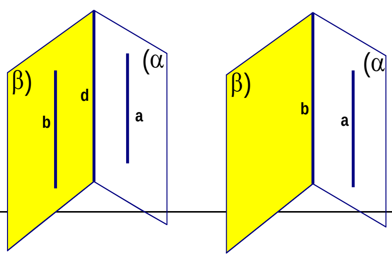
Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến phân biệt thì 3 giao tuyến ấy đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\gamma)=a\\(\beta)\cap(\gamma)=b\\(\alpha)\cap(\beta)=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a//b//c\\a,b,c\ \text{đồng quy}\end{array}\right.$$

- **Hệ quả**:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



$$\left.\begin{array}{l}a\subset(\alpha)\\b\subset(\beta)\\a//b\\(\alpha)\cap(\beta)=d\end{array}\right\}\Rightarrow d//a//b$$

Cách xác định giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song a và b

- **B1**: Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng
- **B2**: Giao tuyến là đường thẳng kẻ từ điểm chung và song song với a hoặc b.

Định lý 2:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\boxed{\left.\begin{matrix} a//c \\ b//c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a//b}$$

Ghi chú

....

....

....

....

....

....

....

B. LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Lấy điểm M thuộc SD.

a/. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b/. Tìm giao điểm của đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên đoạn SD.

a/. Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

b/. Tìm giao điểm của đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB).

c/. Mặt phẳng (BCM) cắt SA tại N. Chứng minh tứ giác $BCMN$ là hình thang.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

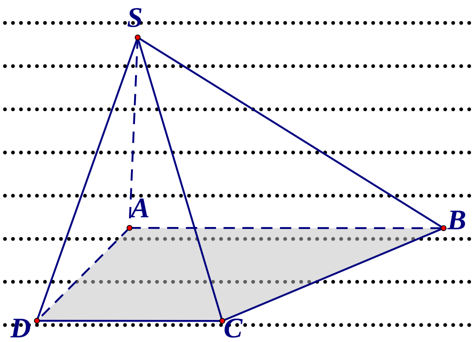
....

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Lấy điểm M thuộc cạnh SD.

a/. Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBC).

b/. Tìm giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB).

Lời giải



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho hình chóp $SABC$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm AC và BC. Lấy điểm I thuộc cạnh SB.

a/. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAB).

b/. Tìm giao điểm của đường thẳng SA và mặt phẳng (IMN).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

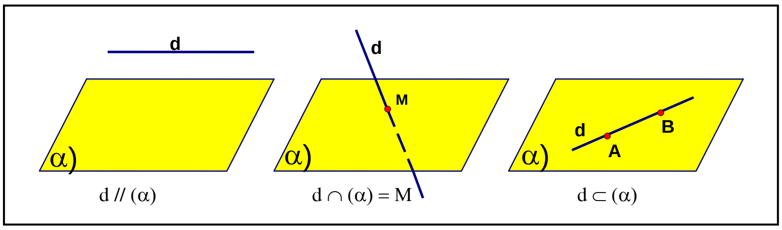
....

VẤN ĐỀ 2

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

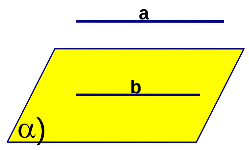
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng



Định lí 1: (Phương pháp chính để chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng)
Nếu đường thẳng a không nằm trong $mp(\alpha)$ và a song song với một đường thẳng b nằm trong (α) thì đường thẳng a song song với (α).

Xem hình minh họa



$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset (\alpha) \\ a // b \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow a // (\alpha)$$

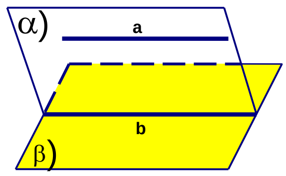
Như vậy để chứng minh một đường thẳng song song với mặt phẳng, ta chỉ cần chỉ ra được đường thẳng đó song song với một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng.

Vì vậy khi giải các bài toán trong quan hệ song song, cần chú ý các dấu hiệu song song như:

- Các hình đặc biệt: Hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.
- Đường trung bình tam giác, các góc so le trong, đồng vị …
- Các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ trong tam giác (Định lí Thalès).

<u>Định lí 2</u>: (Phương pháp xác định giao tuyến của hai mặt phẳng)

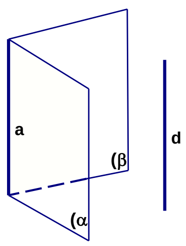
Nếu $mp(\alpha)$ chứa đường thẳng a và a song song với $mp(\beta)$ thì giao tuyến của (α) và (β) (nếu có) sẽ song song với đường thẳng a.



$$\left.\begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a // (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \end{array}\right\} \Rightarrow b // a$$

<u>Hệ quả</u>: (Phương pháp xác định giao tuyến của hai mặt phẳng)

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



$$\left.\begin{array}{l} (\alpha) // d \\ (\beta) // d \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{array}\right\} \Rightarrow a // d$$

<u>△Ghi chú</u>

………

………

………

………

B. LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD. Chứng minh GG' song song với mặt phẳng (ABC).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

a). Chứng minh MN song song với (SBC) và (SAD).

b). Gọi P là trung điểm cạnh SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNP).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB, AC và I là điểm bất kỳ trên cạnh AC.

a). Chứng minh MN song song với mặt phẳng (SBC).

b). Tìm giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MNI).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC; P là điểm trên cạnh SA.

a). Chứng minh đường thẳng CD song song với mặt phẳng (MNP).

b). Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SAB).

c). Gọi Q là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (NMP). Chứng minh $MNQP$ là hình thang.

d). Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng qua hai cạnh bên của $MNQP$. Chứng minh SE song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trên một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (BDF) và (ACE).

b). Chứng minh đường thẳng OO' song song với (ADF) và (BCE).

c). Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(DCEF)$.

Lời giải

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

a). Gọi (α) là mặt phẳng qua DC, cắt SA và SB lần lượt tại M và N. Chứng minh $DCMN$ là hình thang.

b). Gọi I là giao điểm của MC và DN. Chứng minh ba điểm S, I, O thẳng hàng.

Lời giải

Bài 7. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC và P là điểm trên cạnh SB $(SP < PB)$. Mặt phẳng (MNP) cắt SC tại Q.

a). Chứng minh $MNPQ$ là hình thang.

b). Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh I, S, A thẳng hàng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 8. Cho hình chóp $SABC$ có D, E, F lần lượt trên SA, SB, SC sao cho DE cắt AB tại I; EF cắt BC tại K; FD cắt AC tại K. Chứng minh sao cho $I; J; K$ thẳng hàng.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

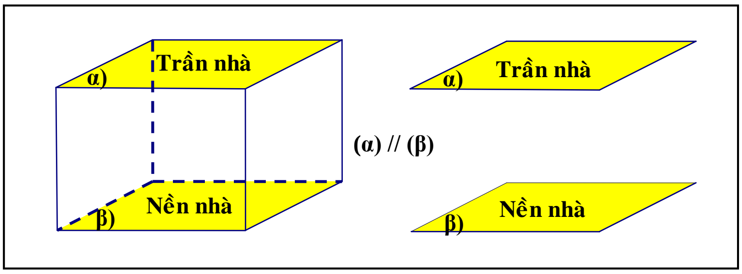
VẤN ĐỀ 3

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Hai mặt phẳng song song

Hai mặt phẳng (α) và (β) song song nếu chúng không có điểm chung.



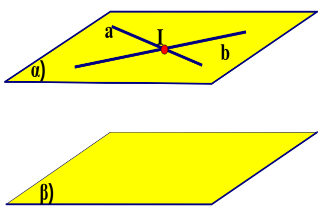
Tính chất:

Nếu đường thẳng $d\subset(\alpha)$ và $(\alpha)//(\beta)$ thì đường thẳng $d//(\beta)$

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ d\subset(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow d//(\beta)$$

Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha)//(\beta)$.



$$\left.\begin{array}{l}a,b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\\ a//(\beta)\\ b//(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$$

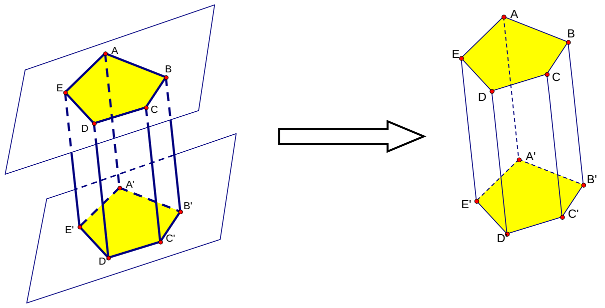
Định lí:

Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Nếu một mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Hình lăng trụ

Hình lăng trụ là hình không gian có 2 mặt đáy là 2 đa giác song song và bằng nhau, các mặt bên là hình bình hành.

- Tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy: Hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác…



Hình lăng trụ ngũ giác $ABCDE.A'B'C'D'E'$

Tính chất:
Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.

Hình hộp
Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

△Ghi chú

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B. LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của $AD,\ BC,\ SA.$

a). Chứng minh hai mặt phẳng (MNP) và (SDC) song song.

b). Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng SB tại Q. Chứng minh Q là trung điểm SB.

c). MP và NQ cắt nhau tại I. Chứng minh SI song song với AD và BC.

Lời giải

....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trên một mặt phẳng. Lấy các điểm M và N lần lượt trên AC và BD sao cho $AM = BN$.

a). Chứng minh hai mặt phẳng (BCE) và (ADF) song song.

b). Chứng minh MN song song với mặt phẳng $(CDEF)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho hinh bình hành $ABCD$ Gọi $Ax,\ By,\ Cz,\ Dt$ là bốn nửa đường thẳng song song, cùng chiều và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) cắt chúng lần lượt tại $A',\ B',\ C',\ D'$.

a). Chứng minh hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(CC'D'D)$ song song.

b). Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

c). Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên AD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và SC.

a). Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (SDC) song song.

b). Chứng minh SD song song với mặt phẳng (α).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm SA, SD và AD.

a). Chứng minh MN song song với mặt phẳng (SBC).

b). Chứng minh hai mặt phẳng (SCB) và (OMN) song song.

c). SK cắt MN tại I. Chứng minh OI song song với mặt phẳng (SCB).

d). Mặt phẳng (OMN) cắt AB tại H. Chứng minh H là trung điểm AB.

Lời giải

Bài 6. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong mặt phẳng và có tâm O, O'

a). Chứng minh OO' song song với mặt phẳng (ADF) và (BCE).

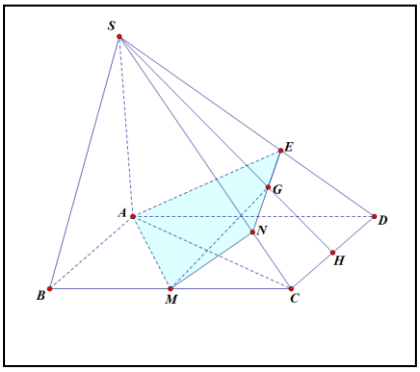
b). Gọi M,N trên AE,BD sao cho $AM=\frac{1}{3}AE$, $BN=\frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song mặt phẳng $AM=\frac{1}{3}AE$.

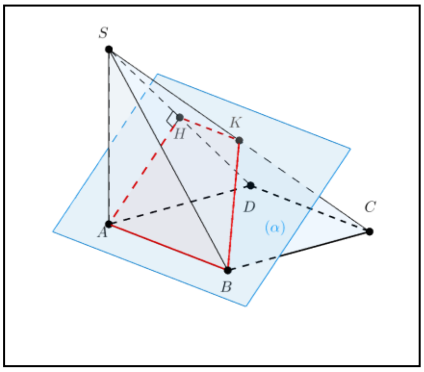
Lời giải

VẤN ĐỀ 4
THIẾT DIỆN

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thiết diện là mặt cắt của một mặt (P) và khối chóp.





Phương pháp xác định thiết diện

Để đi tìm thiết diện ta tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp sao cho các đoạn giao tuyến tạo thành đường khép kín.

Lưu ý

Không nhất thiết (P) cắt tất cả các mặt của hình chóp. Đôi khi nó chỉ cắt 3, 4,… mặt.

△Ghi chú

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B. LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD; E là một điểm thuộc cạnh AD khác với A và D. Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJE).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác SCD.

a). Xác định giao điểm của MG và mặt phẳng $\left(SAC\right)$.

b). Xác định giao điểm của SC và mặt phẳng $\left(AMG\right)$.

c). Xác định thiết diện của chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng $\left(AMG\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi $I,\ J$ lần lượt là trung điểm của AD và BC. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng $\left(IJG\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (α) qua O đồng thời song song với SA và CD. Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....